الفضاءات التبولوجيا — الفصل الأول

تعريف: لتكن X مجموعة ما و τ أسرة من مجموعات X الجزئية تسمى الأسرة τ طبولوجيا على X إذا حققت الشروط التالية

١- أي اجتماع لعناصر من τ هو عنصر من τ

٢- تقاطع عدد منتهٍ من τ هو عنصر من τ

٣- X و Ø عنصران من τ

ان المجموعة X مع التبولوجية τ المعرفة عليها تسمى فضاءً طبولوجيا (نرمز له بـ (X, τ)) ان عناصر المجموعة X تسمى نقاطاً ان عناصر التبولوجيا تسمى مجموعات مفتوحة.

أمثلة:

① X مجموعة ما $\tau = P(X)$ أسرة جميع المجموعات الجزئية لـ X هي طبولوجيا لأنها تحقق شروط ٣ تسمى التبولوجيا المتقطعة والفضاء الناتج يسمى طبولوجي متقطع

في هذا الفضاء أي مجموعة بأخذها تكون مفتوحة

② لتكن X مجموعة ما و τ أسرة مكونة فقط من مجموعتين $\tau = \{X, \emptyset\}$ طبولوجيا تسمى طبولوجيا الغير متقطعة الفضاء الناتج فضاء غير متقطع

③ ان فضاء متري هو فضاء طبولوجي

- بالفضاء المتري عرفنا أولاً المسافة بين نقطتين - الكرة المفتوحة
- المجموعات المفتوحة وأثبتنا أنه أي اجتماع مجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة وتقاطع عدد منتهٍ لمجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة و Ø و (X,d) مجموعتان مفتوحتان نستنتج ان المجموعات المفتوحة في الفضاء المتري تحقق خواص التبولوجيا لذلك تسمى التبولوجيا المترية مُنشأة على أساس المسافة

نرمز أحياناً (X, τ_d) طبولوجيا المترية

" إذاً كل فضاء متري هو فضاء طبولوجي "

مثال: لتكن X تتكون من عنصرين $X = \{\alpha, \beta\}$ نذكر الطوبولوجيات المتعددة

$$\tau_1 = \{\phi, \{\alpha\}, \{\beta\}, X\}$$

كل المجموعات مفتوحة اي سميت ذلك مجموعات تامة

$$\tau_2 = \{\phi, \{\alpha\}, X\}$$

$$\tau_3 = \{\phi, \{\beta\}, X\}$$

$$\tau_4 = \{\phi, X\}$$ غير متقطع

ملاحظة:
يمكن ان يكون اكثر من طوبولوجيا واحدة في مجموعة واحدة اي ان المجموعة X نفسها يمكن ان تصنع فضاءات طوبولوجية مختلفة حسب الطوبولوجيا

مثال:
لنأخذ X المكونة من $X = \{\alpha, \beta\}$ مع $\tau = \{\phi, X\}$
الطوبولوجي هنا لا يمكن توليدها بالدالة المسافة
اي ان الفضاء الطوبولوجي هنا لا يمكن ان يكون متريا، نفرض العكس
جدلا انه توجد مسافة d تولد هذه القوة
$d(\alpha, \beta)$ المسافة بين اي نقطتين مختلفتين دائما > 0 لكن $d(\alpha, \beta) = r$
ولو اخذنا الكرة المفتوحة $B(\alpha, \frac{r}{2})$ عندئذ تكون مكونة من عنصر
$B(\alpha, \frac{r}{2}) = \{\alpha\}$ المجموعة $\{\alpha\}$ في هذه الحالة مفتوحة وهذا تناقض
لان الطوبولوجيا لدينا فرضا $\tau = \{\phi, X\}$ وبالتالي هذا مثال عن فضاء طوبولوجيا ليس متري

مثال: لنأخذ $\mathbb{R}$ مجموعة الاعداد الحقيقية
(1) $\mathbb{R}$ الفضاء المتري الحقيقي المألوف ⟵ ادى هذا الطوبولوجي وجود المسافة
$\tau = \tau_d$ $\quad$ $d(x, y) = |x - y|$
المجموعات المفتوحة في هذا الفضاء في الحالات المفتوحة واجتماعها مع نقاطها
(2) نعرف $(\mathbb{R}, \tau_c)$ طوبولوجيا متممة في $\mathbb{R}$
باقي المجموعات المفتوحة اي مجموعة من $\mathbb{R}$ منتهية

ج نعرف (R, J) طوبولوجيا غير متقطعة ؟ R

$J_0 = \{\emptyset, R\}$ هل هو مجموعة مفتوحة ؟

ج لا، لانه ليس ضمن الطوبولوجيا بل هما مجموعتين فقط

ج $X = R$ و $J = J_1$

$J_1 = \{U \in R : 1 \in U\} \cup \emptyset$ أسرة جميع المجموعات الجزئية في R التي تحوي العدد 1 إضافة إلى المجموعة الخالية

نعم هي طوبولوجيا لان المجموعات المفتوحة هنا هي التي تحوي العدد 1، $\emptyset$، R

س٣:

مثال

$A =]2,1[$ مجموعة مفتوحة في J بينما هي غير مفتوحة في J٢

الطوبولوجيا المنتهية [illegible] نسميها الطوبولوجيا الخشنة وأضعف طوبولوجيا في الطوبولوجيا المنتهية المؤلفة من أكثر ولكن أن نلاحظ انه ليس كل طوبولوجيتين قابلتين للمقارنة أي علاقة أقوى وأضعف هي علاقة ترتيب جزئية على مجموعة كل الطوبولوجيات ؟

جوار نقطة :

تعريف: (X, J) فضاء طبولوجي $x \in X$ نقطة من هذا الفضاء

نقول عن المجموعة N انها جوار النقطة x إذا وجدت مجموعة مفتوحة من u ($u \in J$)

بحيث : $x \in u \subseteq N$

الجوار هو مجموعة تحوي مجموعة مفتوحة تحوي النقطة

مثال :

R فضاء طبولوجي حقيقي

ليس جوار $[x-1, 2]$

ليس جوار $\{4, 2\}$

جوار $]x-1, x+1[$

جوار $[x-4, x+1]$

جوار $[x-3, x+3[$

$x \in u \subseteq U \subseteq$ ت

مثال
$X = \{a, B, c\}$
$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, X\}$
عين نقاط جوار لكل من $\{a, B, c\}$ في (X, τ)

الحل:
جوارات B: لها جوار وحيد هو X
جوارات c: X ، $\{a, c\}$
جوارات a: X ، $\{a, c\}$ ، $\{a, B\}$ ، $\{a\}$
لأن $\{a, B\} \subseteq \{a\} \in a$ ت

مثال
$X = \{a, B, c\}$
$\tau = \{\emptyset, X\}$ ما هي جوارات النقاط:
جوارات B: X
جوارات c: X
جوارات a: X

$X = \{a, B, c\}$
$\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{B\}, \{c\}, \{a, B\}, \{a, c\}, \{B, c\}, X\}$
سنرمز لـ $N(x)$ لأسرة الجوارات x في فضاء (X, τ)
خواص الجوار:
1) $U \in N(x)$ يعني U جوار لـ X
إذا كان $U \in N(x)$ فإن $x \in U$
2) إذا كان $U \in N(x)$ و $U \subseteq G$ فإن $G \in N(x)$
3) إذا كان $U_1, U_2, \ldots, U_n \in N(x)$
فإن $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in N(x)$
حسب تعريف الجوار $(u_i \in \tau)$ $x \in u_i \subseteq U_i$ ، $i = 1, 2, \ldots$
من هنا نجد أن $x \in \bigcap u_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_i$
4) إذا كان $U \in N(x)$
$W \in N(x)$ بحيث $W \subseteq U$ وبحيث $N(y) \ni U$ من أجل أي y
لـ y من W